

Osservazione fondamentale se $m = 1$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{|h|} = 0$$

f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f$ è differenziabile in x_0

Teorema (proprietà delle funzioni differenziabili)

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \text{Int}(X)$

Se f è differenziabile in x_0 allora

- 1) f è continua in x_0
- 2) f è derivabile in x_0
- 3) esistono tutte le derivate direzionali di f in x_0

$$\forall v \in \mathbb{R}^m, v \neq 0 : \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

Definizione Siano $X \subseteq \mathbb{R}^m$ insieme aperto, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

Diciamo che la funzione f è una **FUNZIONE di CLASSE B^1** in X e scriviamo $f \in B^1(X)$ se le derivate parziali di $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$ esistono e sono funzioni continue

Teorema del DIFFERENZIALE TOTALE

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme aperto e non vuoto

Se $f \in B^1(X)$ allora f è differenziabile in X

Osservazione Tutte le funzioni viste nella scorsa lezione, ad eccezione di

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sono funzioni di classe B^1 nei rispettivi domini e quindi sono funzioni differenziabili

Definizione Siano $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$

- Diciamo che x_0 è un **PUNTO di MINIMO LOCALE** (o **RELATIVO**) per f in X

se $\exists U \subseteq \mathbb{R}^m$ intorno di x_0 tale che $\forall x \in U \cap X : f(x_0) \leq f(x)$

- Diciamo che x_0 è un **PUNTO di MASSIMO LOCALE** (o **RELATIVO**) per f in X

se $\exists U \subseteq \mathbb{R}^m$ intorno di x_0 tale che $\forall x \in U \cap X : f(x_0) \geq f(x)$

Teorema di Fermat per funzioni di più variabili (condizione necessaria del 1° ordine)

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \text{Int}(X)$

Se x_0 è un punto di estremo relativo, cioè se x_0 è un punto di massimo/minimo relativo, e f è derivabile in x_0 allora $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$

Definizione Siano $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \text{Int}(X)$

Se f è derivabile in x_0 e $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$ diciamo che x_0 è un **PUNTO CRITICO** per f

Possiamo riscrivere il teorema di Fermat, dicendo che i punti di estremo relativo sono punti critici (per funzioni derivabili)

Come nel caso 1-dimensionale, il teorema di Fermat è solamente una condizione necessaria (ma non sufficiente) per i punti di estremo relativo.

Infatti esistono dei punti critici che non sono punto di estremo relativo, i cosiddetti **PUNTI di SELLA** (o **PUNTI di COLLE**)

Esempi

- 1) La funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ ha un punto di minimo assoluto in $(0,0)$
($\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : f(x,y) > 0 = f(0,0)$)

In particolare $(0,0)$ è punto di minimo relativo

Controlliamo che il gradiente di f sia nullo in $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y, \quad \nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

e quindi $(0,0)$ è punto critico poiché $\nabla f(0,0) = (0,0)$

- 2) La funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$ ha un punto di sella in $(0,0)$
(il grafico di f è una quadrica detta **PARABOLOIDE IPERBOLICO**)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y, \quad \nabla f(x,y) = (2x, -2y)$$

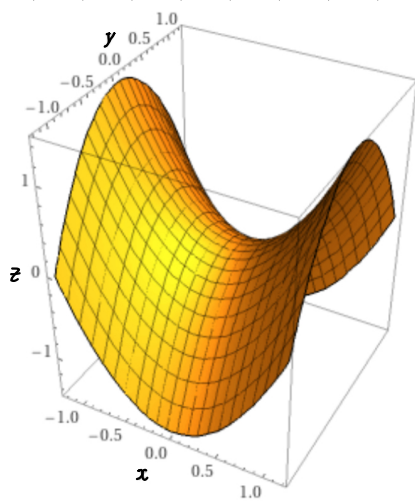
∇f si annulla in $(0,0)$, ma $(0,0)$ non può essere né punto di massimo né punto di minimo relativo

Infatti lungo l'asse x ($y=0$)

$f(x,0) = x^2$ ha un punto di minimo in $x=0$

lungo l'asse y ($x=0$)

$f(0,y) = -y^2$ ha un punto di massimo in $y=0$



Teorema

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e connesso per poligomoli

Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione derivabile tale da $\forall x \in X : \nabla f(x) = (0, \dots, 0)$

allora f è una funzione costante in X

DERIVATE PARZIALI del 2° ORDINE

Come possiamo determinare condizioni necessarie per individuare punti di massimo e minimo relativi interni al dominio di una funzione di più variabili?

Nel caso $m=1$ studiavamo il segno di f' in un intorno del punto stazionario x_0 . Per $m \geq 2$ questo non ha più senso poiché il gradiente ∇f è un vettore e un vettore e quindi non possiamo "studiare il segno". Nel caso unidimensionale, un'altra possibilità consiste nello studiare il segno di $f''(x_0)$:

$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ punto di minimo relativo di } f$$

$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ punto di massimo relativo di } f$$

Per $m \geq 2$ seguiranno queste seconde strade, tuttavia dobbiamo prima introdurre il concetto di "derivata seconda" (che sarà una matrice) e quindi capire in che senso vogliamo studiare il "segno" di questa derivata seconda (che consisterà nel determinare la segnatura della forma quadratica associata).

Definizione Siano $X \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme aperto e non vuoto e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile

Siano $i, j \in \{1, \dots, m\}$ (non necessariamente distinti)

Se la funzione $\frac{\partial f}{\partial x_i}: X \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile parzialmente rispetto alle variabili x_j nel punto $x_0 \in X$, possiamo definire la derivata parziale seconda rispetto a x_i e x_j in x_0

$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x_0)$ questa derivata si denota con i seguenti simboli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0), \quad f_{x_i x_j} (x_0), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x_0), \quad D_{x_i x_j}^2 f(x_0), \quad D_{ij}^2 f(x_0)$$

Se $i \neq j$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0)$ è detta **DERIVATA SECONDA MISTA**

Se $i = j$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} (x_0)$ è detta **DERIVATA SECONDA PURA** e si denota anche

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (x_0), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x_0), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x_0), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x_0), \quad D_{x_i}^2 f(x_0), \quad D_i^2 f(x_0)$$

Osservazione Le derivate parziali del secondo ordine di una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ sono m^2 funzioni

Definizione Siano $X \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme aperto, $x_0 \in X$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

diremo che f è **DERIVABILE 2 VOLTE** in x_0 se

$\forall i, j \in \{1, \dots, m\}$ esista la derivata seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0)$

In tal caso si chiama **MATRICE HESSIANA** di f nel punto x_0

la matrice delle derivate parziali seconde di f in x_0

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} (x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} (x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} (x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} (x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} (x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} (x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} (x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} (x_0) \end{pmatrix}$$

La matrice Hessiana di f in x_0 si denota con uno dei seguenti simboli:

$$H_f(x_0), \quad \text{Hess } f(x_0), \quad \nabla^2 f(x_0), \quad D^2 f(x_0), \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Definizione Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e non vuoto e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f è una **FUNZIONE di CLASSE $\mathcal{C}^2$ in X** e scriviamo $f \in \mathcal{C}^2(X)$ se $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ la funzione $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}: X \rightarrow \mathbb{R}$ esiste ed è continua.

Teorema di SCHWARZ

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e non vuoto e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile 2 volte in X . Se $f \in \mathcal{C}^2(X)$ allora $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall x \in X$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$, ovvero $H_f(x)$ è una matrice simmetrica.

Esempio $f(x, y) = x^2 y$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 \quad \nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

osserviamo che $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ in accordo con il teorema di Schwarz

Applichiamo quanto visto sulle forme quadratiche allo studio della segretura di $H_f(x_0)$

Teorema (Condizioni necessarie del 2° ordine)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e non vuoto, $x_0 \in X$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di classe $\mathcal{C}^2$ in un intorno di x_0 .

- Se x_0 è un punto di massimo relativo allora $H_f(x_0)$ è semidefinita negativa.
- Se x_0 è un punto di minimo relativo allora $H_f(x_0)$ è semidefinita positiva.

Teorema (Condizioni sufficienti del 2° ordine)

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in X$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di classe $\mathcal{C}^2$ in un intorno di x_0 tale che $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$, ovvero x_0 è un punto critico di f .

- Se $H_f(x_0)$ è definita negativa allora x_0 è un punto di massimo relativo.
- Se $H_f(x_0)$ è definita positiva allora x_0 è un punto di minimo relativo.
- Se $H_f(x_0)$ è indefinita allora x_0 è un punto di sella.

Esempio $f(x, y) = x^2 - x^4 + y^2$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Cerchiamo eventuali punti di estremo relativo

1) Determiniamo i punti critici

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4x^3 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1 - 2x^2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \end{cases}$$

Abbiamo trovato tre punti critici: $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $P_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

2) Calcoliamo la matrice Hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 - 12x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2-12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Perché $H_f(x,y)$ è una matrice diagonale gli autovalori sono $2-12x^2$ e 2 ,
impilati il polinomio caratteristico e

$$P[f, x, y](\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-12x^2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-12x^2-\lambda)(2-\lambda)$$

gli autovalori sono dati dall'equazione

$$P[f, x, y](\lambda) = 0 \Leftrightarrow (2-12x^2-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2-12x^2 \vee \lambda = 2$$

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \lambda = 2 \text{ è un autovalore di molteplicità } 2$$

$\Rightarrow H_f(P_1)$ è una matrice definita positiva

$\Rightarrow P_1$ è un punto di minimo relativo

$$H_f(P_{2/3}) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2, \lambda = -4$ sono gli autovalori di $H_f(P_{2/3})$ ed hanno segno discorde

$\Rightarrow H_f(P_{2/3})$ è una matrice indefinita

$\Rightarrow P_2, P_3$ sono punti di sella

Esempio $f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0\}$

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz$$

1) Determiniamo i punti critici di f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{1}{x^2} + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{1}{y^2} + xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{1}{z^2} + xy$$

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} yz = \frac{1}{x^2} \\ xz = \frac{1}{y^2} \\ xy = \frac{1}{z^2} \end{cases}$$

Un particolare notiamo che un punto critico di f deve avere componenti tutte dello stesso segno

Dalle ultime due equazioni ricaviamo che $z = \frac{1}{xy^2}$, $y = \frac{1}{xz^2}$

Sostituendo queste due equazioni nella prima equazione abbiamo

$$\frac{1}{xz^2} \cdot \frac{1}{xy^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y^2 z^2 = 1$$

Analogamente troviamo che $x^2 y^2 = 1$ e $x^2 z^2 = 1$

Riassumendo, abbiamo l'implicazione

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} x^2 y^2 = 1 \\ x^2 z^2 = 1 \\ y^2 z^2 = 1 \end{cases}$$

Possiamo dunque risolvere le ultime due equazioni come segue

$$x^2 = \frac{1}{z^2}, y^2 = \frac{1}{z^2} \text{ e utilizzando queste relazioni nella prima equazione abbiamo } \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z^2} = 1 \Rightarrow z^4 = 1.$$

In maniera analoga, possiamo ricavare da $x^4 = 1$ e $y^4 = 1$ concludiamo da

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} x^4 = 1 \\ y^4 = 1 \\ z^4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \\ z = \pm 1 \end{cases}$$

Infine, utilizziamo quanto osservato in precedenza (ovvero da i punti critici di f hanno necessariamente tutti componenti tutti dello stesso segno) per concludere che gli unici punti critici di f sono $P_1 = (1,1,1)$ e $P_2 = (-1,-1,-1)$

2) Calcoliamo la matrice Hessiana di f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{1}{x^2} + yz \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{2}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{1}{y^2} + xz \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{2}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{1}{z^2} + xy \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{2}{z^3}$$

la matrice Hessiana di f è

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & z & y \\ z & \frac{2}{y^3} & x \\ y & x & \frac{2}{z^3} \end{pmatrix}$$

Determiniamo la separazione di H_f in P_1 e in P_2 calcolando gli autovalori di queste matrici 3×3

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $H_f(P_1)$ è

$$p_{[f,P_1]}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

regole di Sarrus $\rightarrow = (2-\lambda)^3 + 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot (2-\lambda) = (2-\lambda)^3 + 2 - 3(2-\lambda)$
 $= 8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 2 - 6 + 3\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$

Osserviamo che $\lambda=1$ è radice di $p[\mathbb{F}_3, P_1](\lambda)$, infatti

$$p[\mathbb{F}_3, P_1](1) = -1 + 6 - 9 + 4 = 0$$

appliciamo la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 6 & -9 & 4 \\ 1 & & -1 & 5 & -4 \\ \hline & -1 & 5 & -4 & // \end{array}$$

$$\begin{aligned} p[\mathbb{F}_3, P_1](\lambda) &= (\lambda-1)(-\lambda^2+5\lambda-4) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+4) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-4) \\ &= -(\lambda-1)^2(\lambda-4) \end{aligned}$$

$\lambda=1$ (con molteplicità 2) sono gli autovalori di $H_{\mathbb{F}_3}(P_1)$
 $\lambda=4$

$\Rightarrow H_{\mathbb{F}_3}(P_1)$ è definita positiva

$\Rightarrow P_1$ è un punto di minimo relativo

$$H_{\mathbb{F}_3}(P_2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $H_{\mathbb{F}_3}(P_2)$ è

$$p[\mathbb{F}_3, P_2](\lambda) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)^3 + 2(-1)^3 - 3(-1)^2(-2-\lambda)$$

$$= -(2+\lambda)^3 - 2 + 3(2+\lambda) = -(8 + 12\lambda + 6\lambda^2 + \lambda^3) - 2 + 6 + 3\lambda$$

$$= -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda - 4$$

$$p[\mathbb{F}_3, P_2](-1) = 1 - 6 + 9 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \text{ è radice di } p[\mathbb{F}_3, P_2](\lambda)$$

appliciamo la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & -6 & -9 & -4 \\ -1 & & 1 & 5 & 4 \\ \hline & -1 & -5 & -4 & // \end{array}$$

$$\begin{aligned} p[\mathbb{F}_3, P_2](\lambda) &= (\lambda+1)(-\lambda^2-5\lambda-4) = -(\lambda+1)(\lambda^2+5\lambda+4) = -(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda+4) \\ &= -(\lambda+1)^2(\lambda+4) \end{aligned}$$

gli autovalori di $H_{\mathbb{F}_3}(P_2)$ sono $\lambda = -1$ (molteplicità 2) e $\lambda = -4$

$\Rightarrow H_{\mathbb{F}_3}(P_2)$ è definita negativa

$\Rightarrow P_2$ è un punto di massimo relativo

Argomenti Extra: formule di Taylor / matrice Hessiana / divergenza, laplaciano e rotore

FORMULA di TAYLOR per FUNZIONI di PIÙ VARIABILI

Formule di Taylor del 1° ordine (con resto secondo Peano)

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^m$ insieme aperto, $x_0 \in X$ e f funzione di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di x_0 .
Allora $f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + o(\|h\|)$ per $h \in \mathbb{R}^m \rightarrow (0, \dots, 0)$

Formule di Taylor del 2° ordine (con resto secondo Peano)

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^m$ insieme aperto, $x_0 \in X$ e f funzione di classe $\mathcal{C}^2$ in un intorno di x_0 .
Allora
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} h^T \cdot \nabla^2 f(x_0) \cdot h + o(\|h\|^2)$$

$$= f(x_0) + \underbrace{\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) h_j}_{\text{prodotto scalare tra } \nabla f(x_0) \text{ e } h} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) h_j h_k}_{\text{forma quadratica associata alla matrice Hessiana } \nabla^2 f(x_0) \text{ calcolata nel vettore } h \in \mathbb{R}^m} + o(\|h\|^2)$$

per $h \in \mathbb{R}^m \rightarrow (0, \dots, 0)$

Differenziabilità delle funzioni vettoriali

Ricordiamo che per una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(X)$

la differenziabilità di f in x_0 significa (per definizione) richiedere che valga il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot h}{\|h\|} = 0$$

Osserviamo che il quoziente nel limite precedente rappresenta una funzione scalare che dipende dalla variabile $h \in \mathbb{R}^m$.

Se $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, come possiamo modificare la definizione precedente?

Nel caso $m=1$ il prodotto scalare $\nabla f(x_0) \cdot h$ può essere pensato con il prodotto righe per colonne tra il vettore riga $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) \right)$ (matrice $1 \times m$) e il vettore colonna $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$ (matrice $m \times 1$)

Pertanto se $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ il numeratore del quoziente nel limite precedente deve essere una funzione a valori in $\mathbb{R}^m$ dipendenti dalle variabili $\mathbb{R}^m$.

Affinché ciò sia possibile, dobbiamo interpretare $\nabla f(x_0)$ come una matrice $m \times m$ e il prodotto $\nabla f(x_0) \cdot h$ come un prodotto righe per colonne

Definizione

Siano $f = (f_1, \dots, f_m): X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \text{Int}(X)$

Si chiama **MATRICE JACOBIANA** di f in x_0 la matrice $m \times m$

$$\begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \nabla f_2(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x_0) \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobiana di f in x_0 si denota con i seguenti simboli

$$J_f(x_0), \quad \nabla f(x_0), \quad Df(x_0), \quad \frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_1, \dots, x_m)}(x_0), \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$$

Definizione Siano $f = (f_1, \dots, f_m) : X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \text{Int}(X)$

Diciamo che f è **DIFFERENZIABILE** in x_0 se

- f è **DERIVABILE** in x_0 , ovvero esiste la matrice Jacobiana $J_f(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - J_f(x_0) \cdot h}{\|h\|} = 0$

dove $J_f(x_0) \cdot h$ è il prodotto righe per colonne tra la matrice Jacobiana (matrice $m \times m$) e il vettore colonna $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$ (matrice $m \times 1$)

Ricordiamo che $f = (f_1, \dots, f_m) : X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua in $x_0 \in X$ se e soltanto se le funzioni componenti $f_1, \dots, f_m : X \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue in x_0

La prossima proposizione ci dice che vale un risultato analogo per la differenziabilità

Proposizione Siano $f = (f_1, \dots, f_m) : X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \text{Int}(X)$

Sono equivalenti le seguenti proprietà:

- f è differenziabile in x_0
- $f_1, \dots, f_m$ sono differenziabili in x_0

Osservazione Siano $X \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme aperto non vuoto e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{B}^2(X)$. Allora la matrice Hessiana di f non è altro che la matrice Jacobiana del campo vettoriale $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, in simboli $H_f = J_{\nabla f}$

Introduciamo infine tre operatori differenziali molto importanti nelle applicazioni fisiche, ingegneristiche etc.

Definizione (DIVERGENZA)

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $f = (f_1, \dots, f_m) : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{B}^1(X, \mathbb{R}^m)$, cioè $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{B}^1(X)$. Si chiama **DIVERGENZA** di f l'operatore differenziale

$$\text{div } f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_m}$$

La divergenza di f si denota anche $\nabla \cdot f$, si ottiene facendo il "prodotto scalare" tra $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right)$ e $f = (f_1, \dots, f_m)$

Definizione (LAPLACIANO)

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{B}^2(X)$

Si chiama **LAPLACIANO** di f l'operatore differenziale

$$\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}$$

Osservazione $\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) = \nabla \cdot \nabla f$

Definizione (ROTORE)

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^3$ e $f = (f_1, f_2, f_3) : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{B}^1(X, \mathbb{R}^3)$

Si chiama **ROTORE** di f il campo vettoriale

$$\text{rot } f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$$

Il rotore di f si denota anche $\nabla \times f$, si ottiene facendo il "prodotto vettoriale" tra $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ e $f = (f_1, f_2, f_3)$